Лекция 10_Адиабаталық теорияны қолдана отырып, Линза-Тирринг есебін қарастыру

Денелер қозғалысының адиабаталық теориясының атауы жалпы салыстырмалық теориясының механикасындағы эволюциялық қозғалысты зерттеуге арналған М.М.Әбділдин әзірлеген тәсілді білдіреді [11, 20, 21, 22, 23]. Ол қозғалысты сипаттау үшін векторлық элементтерді қолдануға, сызықты емес тербеліс теориясының асимптотикалық әдістеріне және адиабаталық инварианттар әдісіне негізделген.

Жалпы салыстырмалылық механикасында есептер үлкен класы бар, мұнда зерттелетін жүйелерді баяу дамитын Гамильтондық жүйелер деп санауға болады. Басқаша айтқанда, жалпы салыстырмалық механикасының бірқатар мәселелерін ұйтқыған Кеплер есептерін қарастыруға болады. Олар үшін Лагранж функциясы келесідей

$$L = -mc^2 + \frac{mv^2}{2} + \frac{\gamma m m_0}{r} + R(\vec{r}, \vec{v}) \,, \qquad (1)$$

ал гамильтониан

$$H = mc^2 + \frac{p^2}{2m} - \frac{\gamma m m_0}{r} - R(\vec{r}, \vec{v}), \qquad (2)$$

мұндағы R – күйзеліс функциясы ~ $1/c^2$, $\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}}$ - импульс. Қозғалысты $\vec{M}$ және $\vec{A}$ векторлық элементтер арқылы сипаттауға болады. Сонда 1 және 2 элементтердің векторлық сипатына байланысты қозғалыс теңдеулерінің ең жалпы түрін автоматты түрде жаза аламыз.

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \frac{dM}{dt}\vec{e}_M + \left[\vec{\Omega}\vec{M}\right] , \qquad (1.145)$$

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{dA}{dt}\vec{e}_A + \left[\vec{\Omega}\vec{A}\right] , \qquad (1.146)$$

мұндағы $\vec{e}_M$ және $\vec{e}_A$ - $\vec{M}$ және $\vec{A}$ векторларының бағыттары бойынша бірлік векторлар.

Сыртқы гравитациялық өрістегі сынақ денесінің m қозғалыс теңдеулерінің бұл жалпы көрінісінде бұрыштық жылдамдық $\vec{\Omega}$ белгісіз болып қалады. Оның нақты нысаны қарастырылатын физикалық жүйеге байланысты болуы керек. Шынында да, [11] бұл көрсетілген

$$\vec{\Omega} = \frac{\partial \overline{H}}{\partial \vec{M}}, \tag{1.147}$$

мұндағы $\overline{H}$ – Кеплер қозғалысы бойынша орташа алынған Гамильтонның мәні. Сонымен қатар, $\overline{H}$ - $\vec{M}$ -тің функциясы және жүйенің адиабаталық инварианты

$$M_0 = \frac{M}{\sqrt{1 - \frac{A^2}{\alpha^2}}}, \alpha = \gamma m m_0. \tag{1.148}$$

Бұрыштық жылдамдықты білу белгілі релятивистік әсерлердің көпшілігін қозғалыс теңдеулерін (1.145) және (1.146) шешпей-ақ есептеуге мүмкіндік береді. Инварианттың болуы (1.148) қозғалыс теңдеулеріне (1.145) және (1.146) келесі көріністі беруге мүмкіндік береді

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \frac{dM}{dt}\vec{e}_M + \left[\vec{\Omega}\vec{M}\right], \tag{1.149}$$

$$\frac{d\vec{e}_A}{dt} = \left[\vec{\Omega}\vec{e}_A\right]. \tag{1.150}$$

(1.149), (1.150) теңдеулер және (1.147) қатынасы жалпы салыстырмалылық механикасында денелер қозғалысының адиабаталық теориясы деп аталатын жалпы салыстырмалылық механикасының мәселелерін зерттеудің сол тәсілінің математикалық негізін құрайды. Басқаша айтқанда, бұл теңдеулер (1.147) қатынасымен бірге квазикеплерлік есепте эволюциялық қозғалыс мәселесін толығымен шешеді.

Шварцшильд мәселесі үшін, мысалы, жалпы салыстырмалылық механикасындағы денелер қозғалысының адиабаталық теориясы тұрғысынан қарапайым қозғалыс теңдеулері орындалады.

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = 0, \quad \frac{d\vec{A}}{dt} = \left[\vec{\Omega}\vec{A}\right], \tag{1.151}$$

мұндағы Гамильтонның орташа мәні

$$\overline{H} = mc^2 - \frac{m\alpha^2}{2M_0^{\ 2}} + \frac{1}{c^2}\left(\frac{15m\alpha^2}{8M_0^{\ 2}} - \frac{m}{m_0}\xi_0\right)\frac{\alpha^2}{M_0^{\ 2}} - \frac{3m\alpha^4}{M_0^{\ 3}Mc^2} \ . \qquad (1.152)$$

Бұрыштық жылдамдық

$$\vec{\Omega} = \frac{\partial\overline{H}}{\partial\vec{M}} = \frac{3m\alpha^4}{M^3M_0^{\ 3}c^2}\vec{M} = \frac{6\pi\alpha^2}{M^2Tc^2}\vec{e}_M \qquad (1.153)$$

және T периоды бойынша перигелийдің ығысуы

$$\Delta g = \Omega T = \frac{6\pi\alpha^2}{M^2c^2} = \frac{6\pi\gamma m_0}{a\left(1-e^2\right)c^2} \ . \qquad (1.154)$$

Біз тағы да әйгілі Эйнштейн формуласын алдық. Бізге тек $\overline{H}$ векторлық элементіне қатысты $\vec{M}$ туындысын алу ғана қалды. Бұдан Шварцшильд мәселесінде перигелийдің айналуының әсері Гамильтонда орбиталық импульске $\vec{M}$ тәуелділіктің пайда болуымен байланысты екені анық болады. Классикалық механикада, яғни. Кеплер мәселесінде мұндай тәуелділік жоқ және перигелий қозғалыссыз қалады. Кеплер есебі жағдайында Гамильтон тек M_0-жүйенің инвариантына тәуелді және егер туындыны құрастырсақ.

$$\frac{\partial\overline{H}}{\partial M_0} = \frac{m\alpha^2}{M_0^{\ 3}} = \frac{2\pi}{T}, \qquad (1.155)$$

яғни орташа қозғалыс деп аталады.

Енді бірінші жуықтау метрикасының (1.73) [24] негізінде айналмалы массивтік шар өрісіндегі сынақ денесінің ақырлы қозғалысы туралы Линз-Тирринг есебін қарастырыңыз. Бұл жағдайда Гамильтон келесі түрде болады

$$H = mc^2 + \frac{p^2}{2m} - mU - \frac{1}{c^2}\left(\frac{p^4}{8m^3} + \frac{3Up^2}{2m} + \frac{\xi_0}{m_0}mU - \frac{mU^2}{2}\right) -$$
$$- \frac{2\gamma}{c^2}\vec{p}\left[\vec{S}_0\vec{\nabla}\right]\frac{1}{r} - \frac{2\gamma m}{7m_0c^2}\left[\vec{S}_0\vec{\nabla}\right]\left[\vec{S}_0\vec{\nabla}\right]\frac{1}{r} \ ,$$

(1.156)

ал қозғалыс теңдеулері:

$$\dot{\vec{M}} = \frac{2\gamma}{r^3c^2}\left[\vec{S}_0\vec{M}\right] - \frac{12\gamma m\left(\vec{S}_0\vec{r}\right)}{7m_0r^5c^2}\left[\vec{r}\vec{S}_0\right], \tag{1.157}$$

$$\dot{\vec{A}} = \left(4E + 6mU + \frac{m}{m_0}\xi_0\right)\frac{\left[\vec{\nabla}U\vec{M}\right]}{mc^2} + \frac{2\gamma}{r^3c^2}\left[\vec{S}_0\vec{A}\right] + \frac{6\gamma\left(\vec{S}_0\vec{M}\right)}{mr^5c^2}\left[\vec{r}\vec{M}\right] -$$
$$-\frac{6\gamma}{7m_0r^5c^2}\left\{S_0{}^2\left[\vec{r}\vec{M}\right] - \frac{5}{r^2}\left(\vec{S}_0\vec{r}\right)^2\left[\vec{r}\vec{M}\right] - 2\left(\vec{S}_0\vec{r}\right)\left[\vec{S}_0\vec{M}\right] + 2\left(\vec{S}_0\vec{r}\right)\left[\vec{p}\left[\vec{r}\vec{S}_0\right]\right]\right\}. \tag{1.158}$$

Бұл теңдеулерден ішкі құрылымға байланысты интегралды есепке алу Линз-Тирринг есебінің қозғалыс теңдеулерін бұрынғы жұмыстарда келтірілген теңдеумен салыстырғанда айтарлықтай өзгертетіні шығады [3]. Бұл мәселені жалпы салыстырмалық механикасындағы денелер қозғалысының адиабаталық теориясы негізінде қарастыра отырып, басында біз

$$\overline{H} = mc^2 + \overline{\frac{P^2}{2m}} - mU - \frac{1}{c^2}\overline{\left\{\frac{P^4}{8m^3} + \frac{3}{2}\frac{UP^2}{m} + \frac{mU\xi_0}{m_0} - \frac{mU^2}{2}\right\}} - \overline{\frac{2\gamma}{c^2}\left(\left[\vec{S}_0\vec{\nabla}\frac{1}{r}\right]\vec{P}\right)} +$$
$$+\overline{\frac{2m\gamma}{7m_0c^2}\left(\vec{S}_0\vec{\nabla}\right)\left(\vec{S}_0\vec{\nabla}\frac{1}{r}\right)} = mc^2 + E - \frac{m}{c^2}\overline{\left\{\frac{v^4}{8} + \frac{3Uv^2}{2} + \frac{U\xi_0}{m_0} - \frac{U^2}{2}\right\}} -$$
$$-\frac{2\gamma m}{c^2}\overline{\left(\left[\vec{S}_0\vec{\nabla}\frac{1}{r}\right]\vec{v}\right)} + \frac{2m\gamma}{7m_0c^2}\overline{\left(\vec{S}_0\vec{\nabla}\right)\left(\vec{S}_0\vec{\nabla}\frac{1}{r}\right)}; \tag{1.159}$$

Формулаларды қолдану

$$I_1 = \int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{1+e\cos\varphi} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-e^2}};$$
$$I_2 = \int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{(1+e\cos\varphi)^2} = \frac{2\pi}{\left(1-e^2\right)}\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}; \tag{1.160}$$

Гамильтонның релятивистік емес бөлігінің орташа мәнін табамыз

$$\overline{\frac{P^2}{2m}} - mU = -\frac{m\alpha^2}{2M_o^2}; \qquad (1.161)$$

Қалған шарттар сәйкесінше тең

$$\frac{m}{8c^2T}\int_0^T v^4 dt = \frac{M^3}{8c^2m^2TP^2}\int_0^{2\pi}\frac{\left(-\vec{i}\sin\varphi + \vec{j}(\cos\varphi + e)\right)^4}{(1+e\cos\varphi)^2}d\varphi =$$
$$= \frac{M^3}{8c^2m^2TP^2}\int_0^{2\pi}\frac{\left(2(1+e\cos\varphi)+(e^2-1)\right)^2}{(1+e\cos\varphi)^2}d\varphi = \frac{M^3}{8c^2m^2TP^2}\int_0^{2\pi}\frac{(2x+c)^2}{x^2} = \left|\begin{array}{l} x = 1+e\cos\varphi; \\ c = e^2 - 1 \end{array}\right| =$$
$$= \frac{M^3}{8c^2m^2TP^2}\int_0^{2\pi}\frac{4(1+e\cos\varphi)^2 + (e^2-1)^2 + 4(1+e\cos\varphi)(e^2-1)}{(1+e\cos\varphi)^2}d\varphi =$$
$$= \frac{M^3}{8c^2m^2TP^2}\left\{4\int_0^{2\pi}d\varphi + (e^2-1)^2\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{(1+e\cos\varphi)^2} + 4(e^2-1)\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{(1+e\cos\varphi)}\right\} =$$
$$= \frac{\pi M^3}{4c^2m^2TP^2}\left\{4 - 3\sqrt{1-e^2}\right\} = \frac{m\alpha^4}{2c^2MM_0^3} - \frac{3m\alpha^4}{8c^2M_0^4};$$

(1.162)

$$\frac{3m}{2c^2T}\int_0^T Uv^2 dt = \frac{3\gamma m_0 M}{2c^2TP}\int_0^{2\pi}\frac{\left(-\vec{i}\sin\varphi + \vec{j}(\cos\varphi + e)\right)^2}{(1+e\cos\varphi)}d\varphi =$$
$$= \frac{3\gamma m_0 M}{2c^2TP}\int_0^{2\pi}\frac{2(1+e\cos\varphi)+e^2-1}{(1+e\cos\varphi)}d\varphi = \frac{3\gamma m_0 M}{2c^2TP}\left\{2\int_0^{2\pi}d\varphi - (1-e^2)\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{(1+e\cos\varphi)}\right\} =$$
$$= \frac{6\pi\gamma m_0 M}{c^2TP} - \frac{3\pi\gamma m_0 M\sqrt{1-e^2}}{c^2TP} = \frac{3m\alpha^4}{c^2MM_0^3} - \frac{3m\alpha^4}{2c^2M_0^4};$$

(1.163)

$$\frac{m\xi_0}{c^2Tm_0}\int_0^T U dt = \frac{\gamma m^2\xi_0 P}{c^2TM}\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{1+e\cos\varphi} = \frac{\gamma m^2\xi_0 P}{c^2TM}\frac{2\pi}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{m\xi_0\alpha^2}{c^2m_0M_0^2}; \qquad (1.164)$$

$$\frac{m}{2c^2T}\int_0^T U^2 dt = \frac{m^2\gamma^2m_0^2}{2c^2TM}\int_0^{2\pi}d\varphi = \frac{m^2\gamma^2m_0^2\pi}{c^2TM} = \frac{m\alpha^4}{2c^2MM_0^3}; \qquad (1.165)$$

$$\frac{2\gamma m}{c^2}\overline{\left(\left[\vec{S}_0\vec{\nabla}\frac{1}{r}\right]\vec{v}\right)}=\frac{2\gamma m}{c^2}\left(\vec{S}_0\frac{\overline{[\vec{v},\vec{r}]}}{r^3}\right)=-\frac{2\gamma}{c^2}\left(\vec{S}_0\vec{M}\right)\overline{\frac{1}{r^3}}=$$
$$=-\frac{4\pi\gamma m}{TMPc^2}\left(\vec{S}_0\vec{M}\right)=-\frac{2m^2\alpha^4\left(\vec{S}_0\vec{M}\right)}{M_o^3M^3m_oc^2};$$

(1.166)

$$\frac{2m\gamma}{7m_0c^2T}\int_0^T\left(-\frac{\vec{S}_0^2}{r^3}-\frac{3\left(\vec{r}\vec{S}_0\right)^2}{r^5}\right)dt=\frac{2m^2\gamma}{7m_0c^2TM}\int_0^T r^2\left(-\frac{\vec{S}_0^2}{r^3}-\frac{3\left(\vec{r}\vec{S}_0\right)^2}{r^5}\right)d\varphi=$$
$$=\frac{2m^2\gamma}{7m_0c^2TMP}\int_0^{2\pi}\left\{-S_0^2(1+e\cos\varphi)+3\left(S_{ox}\cos\varphi+S_{oy}\sin\varphi\right)^2(1+e\cos\varphi)\right\}d\varphi=$$
$$=\frac{2m^2\gamma}{7m_0c^2TMP}\int_0^{2\pi}\left(-S_0^2-eS_0^2\cos\varphi+3S^2{}_{ox}\cos^2\varphi+3S^2{}_{oy}\sin^2\varphi+6S_{ox}S_{oy}\cos\varphi\sin\varphi+\right.$$
$$\left.+3eS^2{}_{ox}\cos^3\varphi+3eS^2{}_{oy}\cos\varphi\sin^2\varphi+6eS_{ox}S_{oy}\cos^2\varphi\sin\varphi\right)d\varphi=$$

(1.167)

$$\left|\begin{array}{l}\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos2\varphi)d\varphi=\pi;\quad \int_0^{2\pi}\sin^2\varphi d\varphi=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos2\varphi)d\varphi=\pi;\\ \int_0^{2\pi}\cos^3\varphi d\varphi=\int_0^{2\pi}\cos x\cdot\cos^2 xdx=\int_0^{2\pi}\cos^2 xd\sin x=\int_0^{2\pi}(1-\sin^2 x)d\sin x=0;\end{array}\right|$$

$$=\frac{2m^2\gamma}{7m_0c^2TMP}\left(-2\pi S_0^2+3\pi S^2{}_{ox}+3\pi S^2{}_{oy}\right)=\frac{2m^2\gamma}{7m_0c^2TMP}\times$$
$$\times\left(-2\pi S_0^2+3\pi S^2{}_{ox}+3\pi S^2{}_{oy}+3\pi S^2{}_{oz}-3\pi S^2{}_{oz}\right)=$$
$$=\frac{2m^2\gamma\pi}{7m_0c^2TMP}\left\{S_0^2-\frac{3\left(\vec{S}_o\vec{M}\right)^2}{M^2}\right\}=\frac{m^3\alpha^4}{7m_0^2c^2M^3M_0^3}\left\{S_0^2-\frac{3\left(\vec{S}_o\vec{M}\right)^2}{M^2}\right\};$$

(1.168)

Айтылғалы отырған мәселе

$$T=\frac{2\pi M_0^3}{m\alpha^2};\quad P=\frac{M^2}{m\alpha};\ \sqrt{1-e^2}=\frac{M}{M_0};\ \alpha=\gamma mm_0; \qquad (1.169)$$

Барлық есептелген бөліктерді жинап, орташа алынған Гамильтонды жазамыз

$$\overline{H} = mc^2 - \frac{m\alpha^2}{2M_0^2} - \frac{m\alpha^4}{2c^2MM_0^3} + \frac{3m\alpha^4}{8c^2M_0^4} - \frac{3m\alpha^4}{c^2MM_0^3} + \frac{3m\alpha^4}{2c^2M_0^4} - \frac{\xi_0 m\alpha^2}{m_0c^2M_0^2} +$$

$$+ \frac{m\alpha^4}{2c^2MM_0^3} + \frac{2m^2\alpha^4\left(\vec{S}_0\vec{M}\right)}{M_o^3M^3m_oc^2} + \frac{m^3\alpha^4S_0^2}{7m_0^2c^2M^3M_0^3} - \frac{3m^3\alpha^4\left(\vec{S}_o\vec{M}\right)^2}{7m_0^2c^2M^3M_0^3} =$$

$$= mc^2 - \frac{m\alpha^2}{2M_0^2} + \frac{15m\alpha^4}{8c^2M_0^4} - \frac{3m\alpha^4}{c^2MM_0^3} - \frac{\xi_0 m\alpha^2}{m_0c^2M_0^2} +$$

$$+ \frac{2m^2\alpha^4\left(\vec{S}_0\vec{M}\right)}{M_o^3M^3m_oc^2} + \frac{m^3\alpha^4S_0^2}{7m_0^2c^2M^3M_0^3} - \frac{3m^3\alpha^4\left(\vec{S}_o\vec{M}\right)^2}{7m_0^2c^2M^3M_0^3} =$$

$$= mc^2 - \frac{m\alpha^2}{2M_o^2} + \frac{1}{c^2}\left\{\left(\frac{15m\alpha^2}{8M_o^2} - \frac{m}{m_o}\xi_o\right)\frac{\alpha^2}{M_o^2} - \frac{3m\alpha^4}{M_o^3M} +\right.$$

$$\left. + \frac{m^2\alpha^4}{m_oM_o^3M^3}\left[2\left(\vec{S}_o\vec{M}\right) + \frac{mS_o^2}{7m_o} - \frac{3m}{7m_oM^2}\left(\vec{S}_o\vec{M}\right)\left(\vec{S}_o\vec{M}\right)\right]\right\}.$$

(1.170)

Соңында

$$\overline{H} = mc^2 - \frac{m\alpha^2}{2M_0{}^2} + \frac{1}{c^2}\left\{\left(\frac{15m\alpha^2}{8M_0{}^2} - \frac{m}{m_0}\xi_0\right)\frac{\alpha^2}{M_0{}^2} - \frac{3m\alpha^4}{M_0{}^3M} +\right.$$

$$\left. + \frac{m^2\alpha^4}{m_0M_0{}^3M^3}\left[2\left(\vec{S}_0\vec{M}\right) + \frac{mS_0{}^2}{7m_0} - \frac{3m}{7m_0M^2}\left(\vec{S}_0\vec{M}\right)\left(\vec{S}_0\vec{M}\right)\right]\right\}.$$

(1.171)

Векторлық элементтердегі қозғалыс теңдеулері келесідей жазылады

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \left[\vec{\Omega}\vec{M}\right], \ \frac{d\vec{A}}{dt} = \left[\vec{\Omega}\vec{A}\right], \ \vec{\Omega} = \frac{\partial\overline{H}}{\partial\vec{M}}, \qquad (1.172)$$

мұндағы бұрыштық жылдамдықтың айқын түрі

$$\vec{\Omega}=\frac{3m\alpha^4}{M^3M_0{}^3c^2}\vec{M}+\frac{m^2\alpha^4}{m_0M^3M_0{}^3c^2}\left\{2\vec{S}_0-\frac{3m\left(\vec{M}\vec{S}_0\right)}{7m_0M^2}\vec{S}_0+\frac{6m\left(\vec{M}\vec{S}_0\right)^2}{7m_0M^4}\vec{M}\right\}-$$
$$-\frac{3m^2\alpha^4\vec{M}}{m_0M^5M_0{}^3c^2}\left\{2\left(\vec{M}\vec{S}_0\right)+\frac{m}{7m_0}S_0{}^2-\frac{3m\left(\vec{M}\vec{S}_0\right)^2}{7m_0M^2}\right\}.$$

(1.173)

Өрнек (1.173) Линз-Тирринг мәселесі бойынша ерте зерттеулердің нәтижелерін айтарлықтай толықтырады. Осылайша, жалпы салыстырмалық механикасының бірінші жуықтауы метрикадағы ішкі құрылымға байланысты интегралды есепке алу қажет сияқты.

Жалпы салыстырмалық механикасының квази-кеплерлік есептерінің жалпы жағдайы үшін орташа алынған Гамильтондық мәні бар.

$$\overline{H}=\overline{H}\left(M_0,\vec{M},\overrightarrow{\delta\varphi}\right), \tag{1.174}$$

және автономды канондық теңдеулер орындалады [25, 26]

$$\frac{d\vec{M}}{dt}=\frac{\partial\overline{H}}{\partial\vec{\varphi}},\frac{d\vec{\varphi}}{dt}=\frac{\partial\overline{H}}{\partial\vec{M}}, \tag{1.175}$$

мұндағы $\overrightarrow{\delta\varphi}$- шексіз аз айналу векторы.

Қолданылған әдебиет

[1]. Эйнштейн А. Сущность теории относительности. М., 1955, 159 с.

[1]. Фок В.А. Теория пространства, времени и тяготения. М., 1961, 563 с.

[3]. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М., 1973, 400 с.

[4]. Эйнштейн А., Инфельд Л., Гоффман Б. Гравитационные уравнения и проблема движения // Эйнштейн А. Собр. научн. трудов. М., 1966. Т.2. с. 450-513.

[5]. Инфельд Л., Плебанский Е. Движение и релятивизм. М., 1962, 204 с.

[6]. Фок В.А. О движении конечных масс в общей теории относительности// ЖЭТФ, 1939, Т.9. с. 375-410.

[7]. Schwarzschild, Sitzungsber. d. */Akad.d.Wissensch., S.189,1916.

[8]. Kerr R.P., Phys. Rev. Letters, 11,237(1963).

[9]. De Donder. La gravifique einsteinienne. Paris, 1921.

[10]. K.Lanczos. Phys.ZS. 23, 537, 1923.

[11]. Абдильдин М.М. Механика теории гравитации Эйнштейна. Алма-Ата. 1988, 198 с.

[12]. Брумберг В.А. Релятивистская небесная механика. М., 1972, 382 с.

[13]. Абдильдин М.М. О метрике вращающегося жидкого шара. Вопросы теории поля. Алма-Ата, 1985, с. 20-25.

[14]. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. М., 1973, 207 с.

[15]. Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. М., 1968, 799 с.

[16]. Бергман П. Введение в теорию относительности. М., 1947, 380 с.

[17]. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1962, 1094 с.

[18]. Ольховский И.И. Курс теоретической механики для физиков. М., 1974, 569 с.

[19]. Иваницкая О.С. Лоренцев базис и гравитационные эффекты в эйнштейновской теории тяготения. Минск, 1979, 334 с.